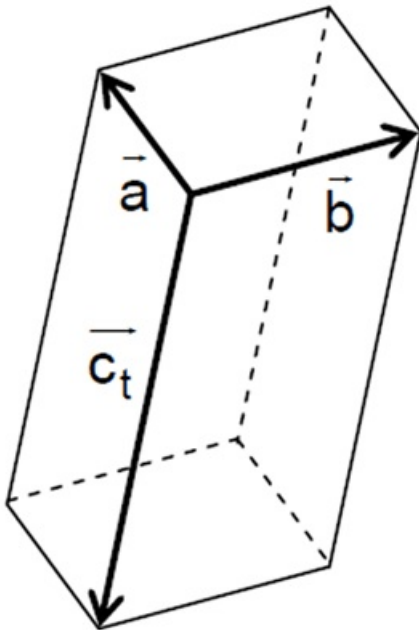


Wie du Volumen von Spaten und Pyramiden berechnest

Aufgabe

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c}_t = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix}$ spannen für jeden Wert von t mit $t \in \mathbb{R} \setminus 0$ einen Körper auf. Die

Abbildung zeigt den Sachverhalt beispielhaft für einen Wert von t .



Bestimme diejenigen Werte von t , für die der jeweils zugehörige Körper das Volumen 15 besitzt.

Schritt 1: Formel für Spatvolumen anwenden

Das Volumen eines durch drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats ist gegeben durch das Spatprodukt

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|.$$

In diesem Fall ergibt sich also:

$$\begin{aligned} V &= |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}_t| \\ &= \left| \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix} \right| \\ &= |(-4) \cdot 4t + (-2) \cdot 2t + 5 \cdot (-5t)| \\ &= 45 |t| \end{aligned}$$

Schritt 2: Gleichung aufstellen und nach t auflösen

Gesucht sind alle Werte von t , für die das eben berechnete Volumen 15 Volumeneinheiten beträgt. Du musst also die Gleichung $45|t| = 15$ lösen. Aber $|t| = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$ ist gleichbedeutend mit $t = -\frac{1}{3}$ oder $t = \frac{1}{3}$.

Lösung

Somit gibt es genau zwei Werte von t mit der gewünschten Eigenschaft, nämlich $t = -\frac{1}{3}$ und $t = \frac{1}{3}$.