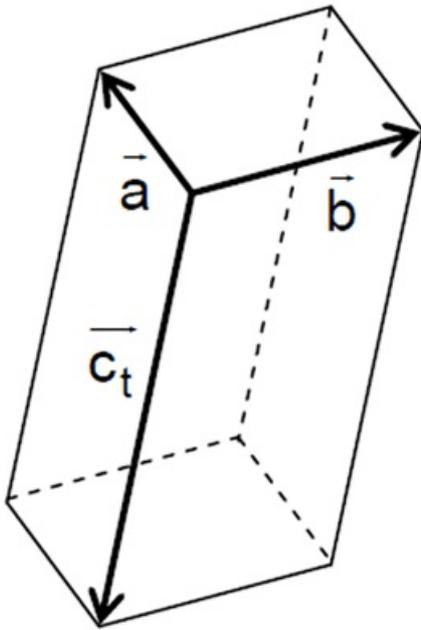


## Wie du feststellst, ob zwei Vektoren oder Geraden aufeinander senkrecht stehen

### Aufgabe

Die Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\vec{c}_t = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix}$  spannen für jeden Wert von  $t$  mit  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  einen Körper auf. Die

Abbildung zeigt den Sachverhalt beispielhaft für einen Wert von  $t$ .



Zeige, dass die aufgespannten Körper Quader sind.

### Schritt 1: Skalarprodukte ausrechnen

Der Körper ist genau dann ein Quader, wenn je zwei sich berührende Kanten einen rechten Winkel einschließen. Aus Symmetriegründen müssen nur die durch Pfeile in der Abbildung dargestellten Kanten geprüft werden. Zu zeigen ist

also  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{a}, \vec{c}_t) = \angle(\vec{b}, \vec{c}_t) = 90^\circ$ . Der Winkel zwischen zwei Vektoren beträgt genau dann  $90^\circ$ , wenn das Skalarprodukt der beiden Vektoren null ist. Das musst du also für jedes Paar hier prüfen:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$\vec{a} \circ \vec{c}_t = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix} = 2 \cdot 4t + 1 \cdot 2t + 2 \cdot (-5t) = 8t + 2t - 10t = 0$$

$$\vec{b} \circ \vec{c}_t = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix} = (-1) \cdot 4t + 2 \cdot 2t + 0 \cdot (-5t) = -4t + 4t = 0$$

### Lösung

Somit stehen die drei Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}_t$  paarweise aufeinander senkrecht, unabhängig vom Parameter  $t$ . Also spannen sie einen Quader auf.

### **Bemerkung**

Wenn du zeigen willst, dass zwei Geraden senkrecht aufeinanderstehen, dann musst du prüfen, ob das Skalarprodukt der zugehörigen Richtungsvektoren null ist.