

Wie du bedingte Wahrscheinlichkeiten berechnest

Aufgabe

Bei der Herstellung von Stoffteddys entsteht ein Ausschuss von 8 %. Bei der Endkontrolle wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 97 % ein nicht einwandfreier Teddy erkannt, ein einwandfreier Teddy wird mit 2 % aussortiert.

- Erstelle ein geeignetes Baumdiagramm.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Teddy nicht in Ordnung, wenn er in der Endkontrolle aussortiert wurde?

Hinweis

Bei dieser Aufgabe geht es darum, zu entscheiden, wie wahrscheinlich es ist, dass ein produzierter Teddy wirklich defekt ist, wenn er bei der Qualitätskontrolle aussortiert wurde. Du musst hier die zwei Ereignisse „Teddy ist defekt“ und „Teddy wurde aussortiert“ zueinander in Beziehung setzen.

Schritt 1: Abkürzungen festlegen

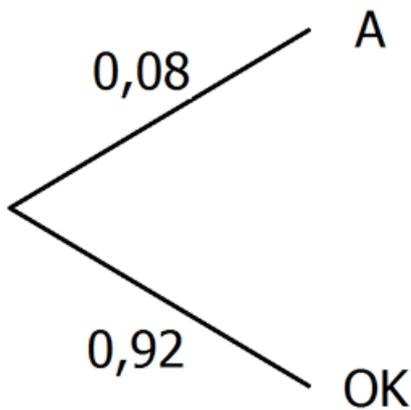
Bei solchen Textaufgaben mit vielen Informationen ist es oft hilfreich, die Informationen kurz schematisch darzustellen und Abkürzungen festzulegen, mit denen du im nächsten Schritt weiterarbeitest. Da du ja ein Baumdiagramm zeichnen sollst, brauchst du diese Abkürzungen, um keine ewig langen Texte im Baumdiagramm unterbringen zu müssen. Außerdem hilft dir ein solches Vorgehen, die Informationen in deinem Kopf zu sortieren. So könnten deine Abkürzungen aussehen:

A	Teddy ist Ausschussware (ist also nicht einwandfrei)
OK	Teddy ist kein Ausschuss (also tatsächlich in Ordnung)
EA	Endkontrolle sortiert Teddy aus
EOK	Endkontrolle sortiert Teddy nicht aus

Schritt 2: Baumdiagramm zeichnen

Erste Stufe

Auf der ersten Stufe des Baumdiagramms entscheidet sich, ob der Teddy Ausschussware oder ohne Mängel ist. Im Aufgabentext findest du die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten ein bisschen versteckt, es heißt nämlich, dass bei der Produktion der Teddys ein Ausschuss von 8 % entsteht. Damit liegt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teddy Ausschussware ist, bei 0,08 und entsprechend die Wahrscheinlichkeit, dass der Teddy okay ist, bei 0,92.

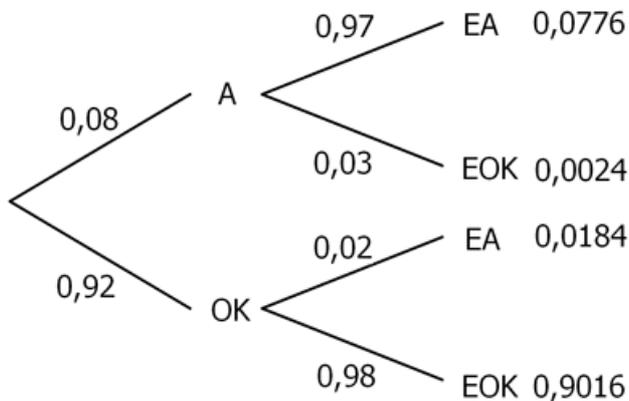


Zweite Stufe

Bei der zweiten Stufe des Baumdiagramms geht es darum, ob ein Teddy die Endkontrolle übersteht oder für Ausschuss befunden wird.

Auch hier trägst du zunächst die Informationen aus der Aufgabenstellung zusammen. Ein Teddy, der nicht okay ist, wird zu mit einer Wahrscheinlichkeit von 97 %, also 0,97 als defekt erkannt. Damit steht auch die Wahrscheinlichkeit dafür fest, dass er nicht als Ausschuss erkannt wird, nämlich 0,03.

Weiterhin weißt du aus der Aufgabenstellung, dass ein eigentlich einwandfreier Teddy zu 2 %, also mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,02, fälschlicherweise als defekt deklariert wird. Damit steht auch fest, dass einwandfreie Teddys die Endkontrolle mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,98 heil überstehen.



Wahrscheinlichkeiten am Pfadende berechnen

Die Wahrscheinlichkeiten am Pfadende berechnest du mithilfe der ersten Pfadregel, die besagt, dass entlang eines Pfades multipliziert wird. Die Wahrscheinlichkeit von "Teddy ist Ausschuss" und "Teddy wird erkannt" berechnest du, indem du die Werte der beiden Einzelwahrscheinlichkeiten multiplizierst:

$$P(A \cap EA) = 0,08 \cdot 0,97 = 0,0776$$

$$P(A \cap EOK) = 0,08 \cdot 0,03 = 0,024$$

$$P(OK \cap EA) = 0,92 \cdot 0,02 = 0,0184$$

$$P(OK \cap EOK) = 0,92 \cdot 0,98 = 0,9016$$

Schritt 3: Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit anwenden

Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein Teddy nicht in Ordnung ist, unter der Bedingung, dass er aussortiert wurde.

Hierzu brauchst du die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit: $P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}$, manchmal auch geschrieben als $P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}$ (gesprochen: Die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B ist gleich ...).

Für unseren Teddy heißt das: $P_{EA}(A) = \frac{P(A \cap EA)}{P(EA)}$

Wahrscheinlichkeit $P(A \cap EA)$ ablesen

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teddy nicht in Ordnung ist und aussortiert wurde, kannst du aus dem Baumdiagramm ablesen.

$$P(A \cap EA) = 0,0776$$

Wahrscheinlichkeit $P(EA)$ berechnen

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teddy aussortiert wurde, musst du noch berechnen. Diesen Wert erhältst du, indem du die Wahrscheinlichkeiten von „der Teddy ist defekt und wird aussortiert“ zur Wahrscheinlichkeit von „der Teddy ist nicht defekt und wird aussortiert“ addierst.

$$\begin{aligned} P(EA) &= P(A \cap EA) + P(OK \cap EA) \\ &= 0,0776 + 0,0184 \\ &= 0,096 \end{aligned}$$

Werte einsetzen und berechnen

$$P_{EA}(A) = \frac{0,0776}{0,096} = 0,8083$$

Lösung

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8083, oder **über 80 %**, ist ein Teddy nicht in Ordnung, wenn er in der Endkontrolle aussortiert wurde.