

Wie du Wahrscheinlichkeiten mit Baumdiagrammen bestimmst

Aufgabe

Bei 0,074 % der neugeborenen Kinder liegt eine bestimmte Stoffwechselstörung vor. Wird diese Störung frühzeitig erkannt, lässt sich durch eine geeignete Behandlung eine spätere Erkrankung vermeiden. Zur Früherkennung kann zunächst ein einfacher Test durchgeführt werden. Zeigt das Ergebnis des Tests die Stoffwechselstörung an, so bezeichnet man es als positiv.

Liegt bei einem neugeborenen Kind die Stoffwechselstörung vor, so ist das Testergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,5 % positiv. Liegt bei einem neugeborenen Kind die Stoffwechselstörung nicht vor, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Testergebnis irrtümlich positiv ist, 0,78 %.

Bei einem zufällig ausgewählten neugeborenen Kind wird der Test durchgeführt. Betrachtet werden folgende Ereignisse:

S : „Die Stoffwechselstörung liegt vor.“

T : „Das Testergebnis ist positiv.“

Berechne die Wahrscheinlichkeit $P(T)$.

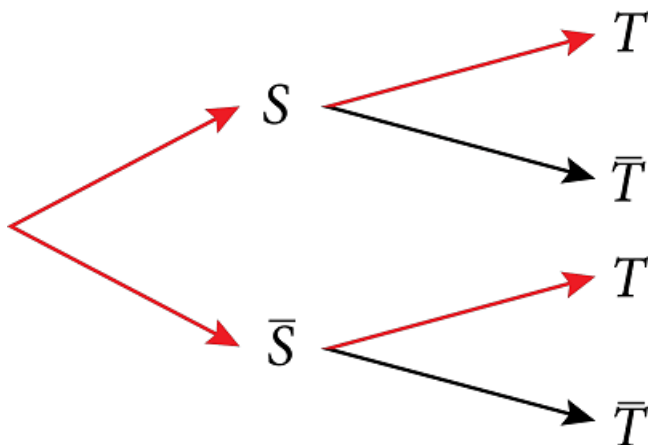
[Zur Kontrolle: $P(T) \approx 0,85\%$]

Schritt 1: Baumdiagramm anfertigen

Trage zunächst die Angaben aus der Aufgabenstellung in ein Baumdiagramm ein. Bei der Durchführung des Tests sind zwei Informationen von Interesse: zum einen, ob die Stoffwechselstörung vorliegt oder nicht, und zum andern, ob das Testergebnis positiv ist oder nicht.

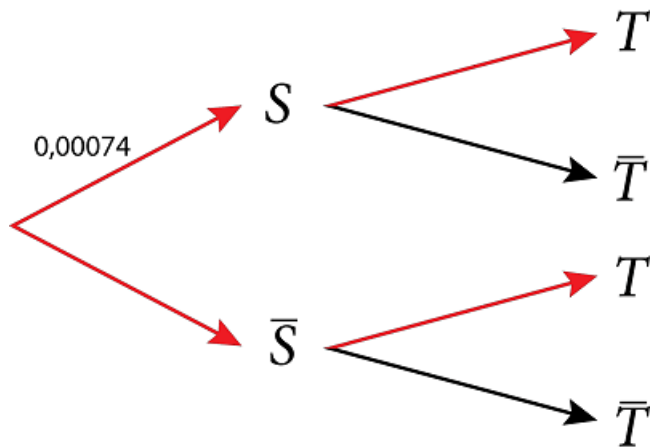
Der erste Satz der Aufgabenstellung gibt direkt die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses S an, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass die Stoffwechselstörung vorliegt. Deswegen nehmen wir auf der *ersten* Stufe des Baumdiagramms die Fallunterscheidung Stoffwechselstörung oder keine Stoffwechselstörung und auf der zweiten Stufe die Fallunterscheidung Test positiv oder Test negativ vor.

Unter Benutzung der in der Aufgabenstellung eingeführten Abkürzungen S und T ergibt sich folgende Grobstruktur des Baumdiagramms:



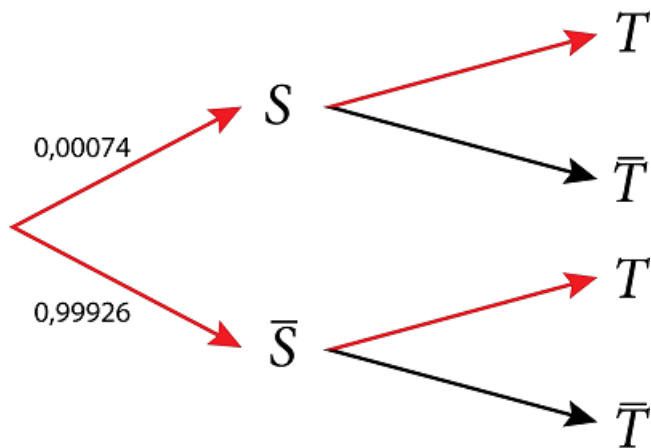
Dabei ist $\bar{S}$ das Gegenereignis zu S , also der Fall, dass die Stoffwechselstörung nicht vorliegt; analog $\bar{T}$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass T eintritt, also einer der beiden rot markierten Pfade. Um diese Wahrscheinlichkeit zu berechnen, brauchst du alle Übergangswahrscheinlichkeiten der roten Pfeile.

Bei 0,074 % der neugeborenen Kinder liegt laut Aufgabenstellung die Stoffwechselstörung vor. Diese Information trägst du gleich in dein Baumdiagramm ein, denn sie gehört zu einem der Pfeile, die wir für die Berechnung von $P(T)$ brauchen (siehe rote Markierungen in der ersten Grafik):

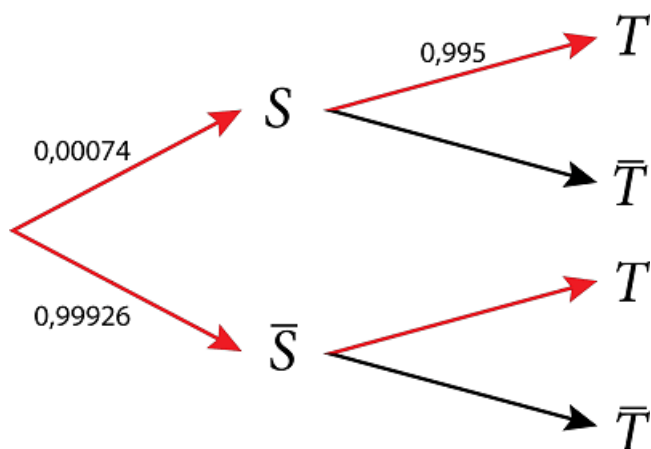


Da in jedem Fall entweder S oder $\bar{S}$ eintritt, ist auf der ersten Stufe

$$P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0,00074 = 0,99926$$



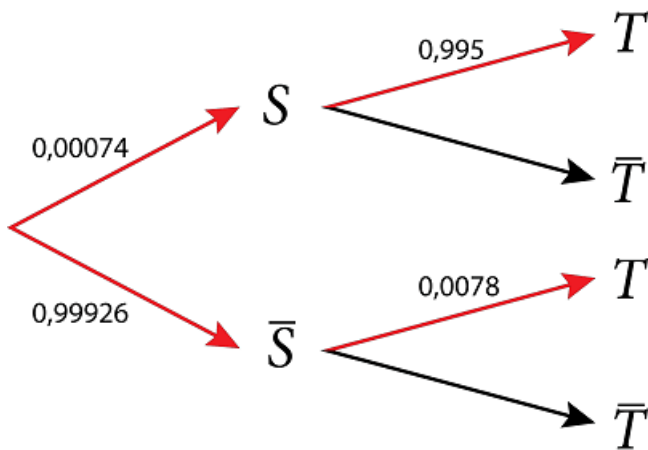
Liegt bei einem neugeborenen Kind die Stoffwechselstörung vor, so ist laut Aufgabenstellung das Testergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,5 % positiv. Diese Information gibt uns die Wahrscheinlichkeit zum Pfeil oben rechts:



Jetzt fehlt uns nur noch eine Wahrscheinlichkeit, die wir zur Berechnung von $P(T)$ brauchen, nämlich für den Pfeil von $\bar{S}$ nach T . Dazu benutzen wir folgende Information aus der Aufgabenstellung:

Liegt bei einem neugeborenen Kind die Stoffwechselstörung nicht vor, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Testergebnis irrtümlich positiv ist, 0,78 %.

Somit ist die fehlende Wahrscheinlichkeit 0,0078:



Schritt 2: Pfadregeln anwenden

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(T)$ ist nach der Pfadadditionsregel die Summe der Wahrscheinlichkeiten der beiden rot markierten Pfade, also $P(S \cap T)$ und $P(\bar{S} \cap T)$.

Nach der Pfadmultiplikationsregel ist die Wahrscheinlichkeit eines Pfades gleich dem Produkt aller Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades, also:

$$P(S \cap T) = 0,00074 \cdot 0,995 = 0,0007363 \text{ und}$$

$$P(\bar{S} \cap T) = 0,99926 \cdot 0,0078 = 0,007794228$$

$P(T)$ ist nach der Pfadadditionsregel die Summe dieser beiden Wahrscheinlichkeiten, also:

$$P(T) = P(S \cap T) + P(\bar{S} \cap T) = 0,0007363 + 0,007794228 = 0,008530528$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Test positiv ausfällt, beträgt etwa 0,85 %.

Bemerkung

Das vollständige Baumdiagramm sieht so aus:

