Wie du die Lösungsmengen einfacher Wurzel- bzw. Potenzgleichungen rechnerisch bestimmst

Aufgabe

Bestimme jeweils die Definitions- und Lösungsmenge der folgenden Gleichungen.

a) $(2z-1)^2 + (1+2z)^2 = 10$

b) $5 = 2z - \sqrt{4z^2 - 15}$

Schritt 1: Definitionsmenge bestimmen

Bei Teil a) tauchen keine Brüche, Wurzeln oder Potenzen mit negativem Exponenten auf. Die in der Gleichung vorkommenden Terme sind also alle auf ganz R definiert: D = R.

Bei Teil b) taucht eine Wurzel auf. Der Ausdruck unter der Wurzel darf nicht negativ werden. Der Wurzelterm ist also genau dort definiert, wo $4z^2 - 15 \geq 0$ erfüllt ist. Diese Ungleichung vereinfachst du wie folgt:

$$\begin{aligned} 4z^2 - 15 &\geq 0 && \mid +15 \\ 4z^2 &\geq 15 && \mid :4 \\ z^2 &\geq \frac{15}{4} && \mid \text{Wurzel ziehen} \\ \mid z \mid &\geq \frac{\sqrt{15}}{2} && \mid \text{Fallunterscheidung } z < 0 \text{ oder } z \geq 0 \end{aligned}$$

$$z \in \left]-\infty; -\frac{\sqrt{15}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{15}}{2}; \infty\right[$$

Der gemeinsame Definitionsbereich aller Terme in Gleichung b) ist also

$$D = \left]-\infty; -\frac{\sqrt{15}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{15}}{2}; \infty\right[$$

Schritt 2: Gleichung a) lösen

Multipliziere zuerst die Klammern aus; benutze dazu die binomischen Formeln:

$(2z-1)^2 = (2z)^2 - 2 \cdot 2z \cdot 1 + 1^2 = 4z^2 - 4z + 1$

und

$(1+2z)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2z + (2z)^2 = 1 + 4z + 4z^2$,

also lautet die Gleichung a)

$4z^2 - 4z + 1 + 1 + 4z + 4z^2 = 10$.

Fasse jetzt die Terme auf der linken Seite zusammen: Die Vielfache von z heben sich gegenseitig auf und übrig bleibt $8z^2 + 2 = 10$, also $8z^2 = 8$ bzw. $z^2 = 1$. Jetzt ziehst du die Wurzel und bekommst $\mid z \mid = 1$, also entweder $z = -1$ oder $z = 1$.

Die Lösungsmenge ist also $L = \{-1; 1\}$.

Schritt 3: Gleichung b) lösen

Wenn du eine Wurzelgleichung lösen musst, versuche immer die Wurzel auf einer Seite der Gleichung zu isolieren und alle anderen Terme auf die andere Seite zu bringen. In diesem Fall geht das so:

$$
\begin{array}{ll}
5 = 2z - \sqrt{4z^2 - 15} & \left| + \sqrt{4z^2 - 15} - 5 \right. \\
\sqrt{4z^2 - 15} = 2z - 5 & |\,\text{quadrieren} \\
4z^2 - 15 = (2z-5)^2 = (2z)^2 - 2 \cdot 2z \cdot & |\,\text{mit 2. binomischer Formel vereinfachen} \\
5 + 5^2 = 4z^2 - 20z + 25 & \\
-15 = -20z + 25 & |\,+15 + 20z \\
20z = 25 + 15 = 40 & |\,:20 \\
z = 2 &
\end{array}
$$

Diese Rechnung zeigt: Die Gleichung hat höchstens eine Lösung. Wenn es eine gibt, dann $z = 2$.

In der Herleitung wurde quadriert. Da das Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist, musst du das Ergebnis prüfen. Setze also $z = 2$ in die Gleichung ein und prüfe, ob die Gleichung dann stimmt.

$$5 = 2 \cdot 2 - \sqrt{4 \cdot 2^2 - 15} = 4 - \sqrt{1} = 3$$

Das ist eine falsche Aussage, also ist 2 keine Lösung der Gleichung. Da aber 2 der einzige Kandidat ist, gibt es keine Lösung. Die Lösungsmenge ist also leer.

$L = \emptyset$.